

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

TEMA 2

Limites

Antes de definir el concepto de límites para funciones de dos o más variables, recordaremos el concepto de límites para funciones de una variable independiente.

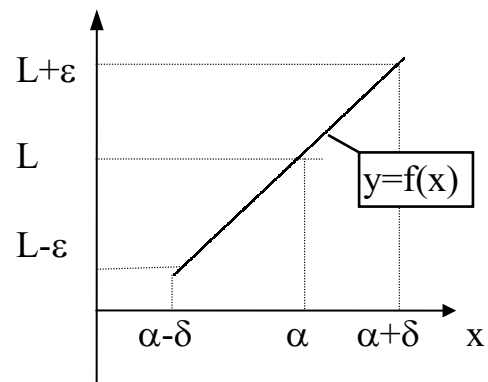
Definición : Dada una función $y = f(x)$ que esté definida en un entorno del punto $x = \alpha$, esta función tiende al límite L cuando x tiende a α , si para cada número positivo ε por pequeño que este sea, es posible hallar otro número positivo δ tal que para todo los valores de x diferentes de α que satisfacen la desigualdad :

$$|\mathbf{x}-\alpha|<\delta \quad \text{se verifica la desigualdad} \quad |\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{L}|<\varepsilon \quad \text{es decir :}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \iff \exists \varepsilon \wedge \delta = \delta(\varepsilon)} \quad \text{de tal forma :}$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall \quad |x - \alpha| < \delta$$

Esto nos indica que al trazar dos rectas paralelas al eje x que pasen por los puntos $L+\varepsilon$ y $L-\varepsilon$ se encontraran todos los puntos de la curva cuyos valores de x verifican que $|x - \alpha| < \delta$



Limite de funciones de dos variables independientes - Limite Doble

Dada una función de dos variables independientes $z = f(x,y)$ con dominio de definición S y rango T , esta función tiene límite L en el punto $P(\alpha, \beta)$ si para cada número positivo ε arbitrario y tan pequeño como se quiera se puede hallar otro número positivo δ o sea $\delta = \delta(\varepsilon)$ que verifique que todos los puntos del entorno

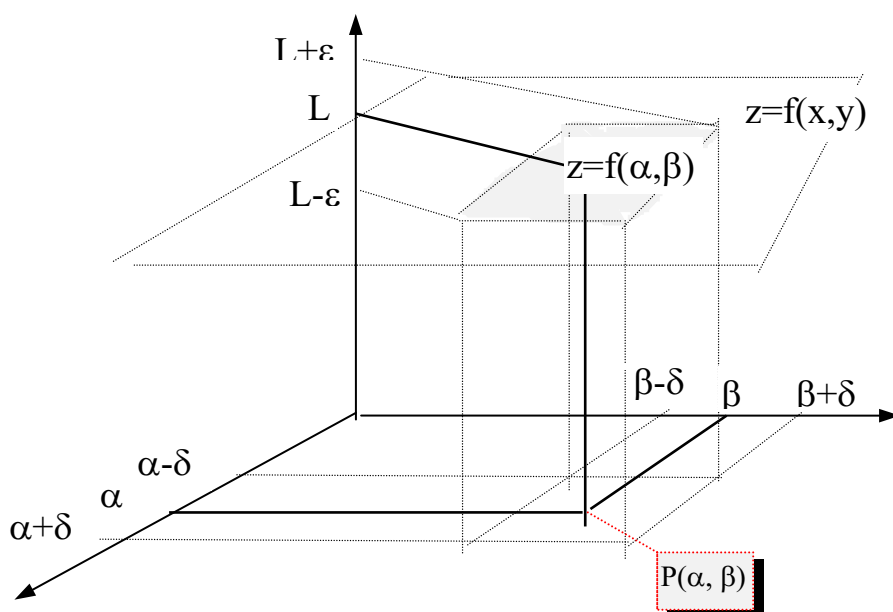
rectangular reducido del punto $P(\alpha, \beta)$ tienen valores de la función cuya diferencia con el valor límite L en valor absoluto sea menor que el valor ε elegido arbitrariamente.

Esta definición nos expresa :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ y \rightarrow \beta}} f(x, y) = L \Leftrightarrow \exists \varepsilon \wedge \delta = \delta(\varepsilon) /$$

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \forall (x, y) \text{ de } N'(P, \delta)$$

$$\therefore \begin{cases} 0 < |x - \alpha| < \delta \\ 0 < |y - \beta| < \delta \end{cases}$$



Este límite se define como DOBLE o SIMULTANEO dado que se tiende al punto $P(\alpha, \beta)$ según entornos reducidos rectangulares.

También se puede considerar el entorno reducido circular siguiente :

$$0 < (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < \delta^2$$

Si hiciéramos pasar planos paralelos al plano (x, y) por los puntos $L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon$ todos los puntos de la superficie $z = f(x, y)$ que aparecen sombreados en la figura, estarían contenidos entre los planos $z = L + \varepsilon$ y $z = L - \varepsilon$

LIMITES ITERADOS O SUCESIVOS

Estos limites no deben interpretarse como limites dobles (en donde las variables tendían simultáneamente), sino como su nombre lo indica, limites que se suceden o se iteran.

Los limites iterados son los siguientes.

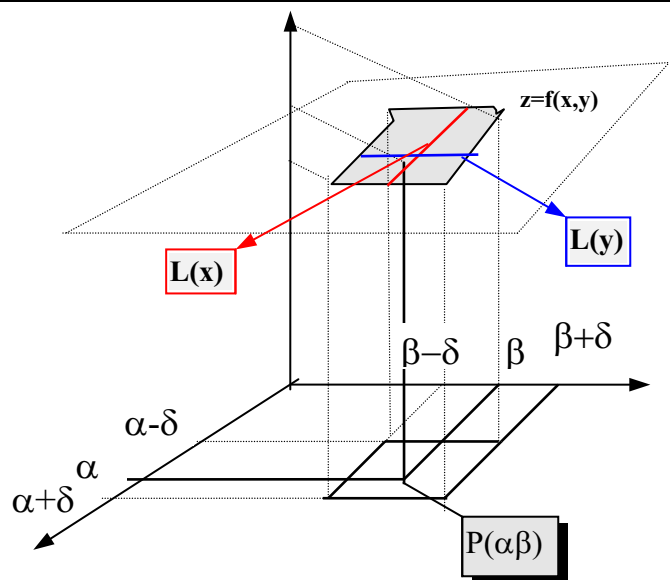
$$\lim_{y \rightarrow \beta} \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow \beta} \left[\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x, y) \right] = \lim_{y \rightarrow \beta} L(y)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \lim_{y \rightarrow \beta} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\lim_{y \rightarrow \beta} f(x, y) \right] = \lim_{x \rightarrow \alpha} L(x)$$

Estos limites presuponen la existencia de las funciones $L(y) = \left[\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x, y) \right]$ y

$L(x) = \left[\lim_{y \rightarrow \beta} f(x, y) \right]$ en un cierto entorno reducido del punto $P(\alpha, \beta)$

Es decir que primero nos acercamos hacia el valor $x=\alpha$ y la función $z=f(x,y)$ se acerca o se transforma en la función $z=f(\alpha,y)=L(y)$. En el otro caso nos acercamos hacia $y = \beta$ y la función $z=f(x,y)$ se acerca o se transforma en la función $z=f(x,\beta)=L(x)$. Por lo tanto dada la función $z=f(x,y)$ se pueden definir tres limites, el limite doble, y los dos limites iterados.



Ejemplos

Dada la función $z = f(x, y) = (x \cdot y) / (x + y)$ hallar los tres limites en el punto P de coordenadas (1,2)

Limite doble

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x \cdot y}{x + y} = \frac{1 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{2}{3}$$

Limites iterados

$$\lim_{y \rightarrow 2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot y}{x + y} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{1 \cdot y}{1 + y} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{y \rightarrow 2} \frac{x \cdot y}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot 2}{x + 2} = \frac{2}{3}$$

En este ejemplo los tres limites son iguales. Veamos otro ejemplo :

$z = f(x, y) = (x + y) / (x - y)$ en el punto $P(0,0)$

Limite doble

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x + y}{x - y} = \frac{0 + 0}{0 - 0} = \frac{0}{0} \quad \nexists \quad (\text{El limite doble no existe})$$

Limites iterados

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + y}{x - y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 + y}{0 - y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{y}{-y} \right] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x + y}{x - y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{x} \right] = 1$$

En este ejemplo vemos que no existe el limite doble y existen los iterados y son diferentes. Lo que se realizó fue calcular el limite de $z = f(x, y)$ para x tendiendo a α y considerando a la variable y como una constante. Se obtiene así una función de y que la definimos $L(y)$, luego se calcula el limite de $L(y)$ para y tendiendo a β .

En el segundo caso se invierte el orden de las operaciones.

En el ultimo ejemplo vemos que la existencia de los limites iterados de una función no implica la igualdad de los mismos.

Se puede asegurar que si los **limites iterados** son distintos, el **limite doble** no existe.

RELACION ENTRE LOS LIMITES DOBLE E ITERADOS

TEOREMA

Veremos a continuación el teorema que relaciona la existencia del limite doble con los iterados.

$$\text{Si } \exists \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ y \rightarrow \beta}} f(x,y) = L \quad \wedge \quad \exists \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x,y) = L(y) \quad \forall y \in a \quad 0 < |y - \beta| < \delta$$

entonces se verifica que : $\lim_{y \rightarrow \beta} L(y) = L$

además si

$$\exists \lim_{y \rightarrow \beta} f(x,y) = L(x) \quad \forall x \in a \quad 0 < |x - \alpha| < \delta$$

entonces se verifica que : $\lim_{x \rightarrow \alpha} L(x) = L$ y por lo tanto los tres limites son iguales.

Demostración :

Por hipótesis teníamos lo siguiente :

Existe el limite doble : $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ y \rightarrow \beta}} f(x,y) = L$ y también :

$$\exists \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x,y) = L(y) \quad \forall y \in a \quad 0 < |y - \beta| < \delta$$

por lo tanto por la definición de limite debe verificarse que :

$$|f(x,y) - L(y)| < \epsilon_1 \quad \forall x / \quad 0 < |x - \alpha| < \delta$$

y por la existencia del limite doble debe verificarse que :

$$|f(x,y) - L| < \epsilon \quad \forall (x,y) \in \begin{cases} 0 < |x - \alpha| < \delta \\ 0 < |y - \beta| < \delta \end{cases}$$

Podemos escribir también que

$L(y) - L = L(y) - f(x,y) + f(x,y) - L$ y en valor absoluto será :

$$| L(y) - L | < | L(y) - f(x,y) | + | f(x,y) - L | < \varepsilon_1 + \varepsilon = \varepsilon'$$

luego $| L(y) - L | < \varepsilon'$ por definición, nos indica que $\lim_{y \rightarrow \beta} L(y) = L$

y por ser $L(y) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x,y)$ será $\lim_{y \rightarrow \beta} \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x,y) = L$

De igual manera se demuestra la segunda parte del enunciado.

Este teorema nos asegura que si existe el limite doble y los iterados en un punto todos ellos son iguales.

Puede ocurrir que existan y sean iguales los limites iterados y no exista el limite doble y finalmente que no exista ninguno de ellos.

GENERALIZACION AL \mathbb{R}^n

Sea $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(\bar{x})$ una función con dominio $S \in \mathbb{R}^n$ y rango $T \in \mathbb{R}^1$ y sea $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un punto de acumulación de S y $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ un punto genérico del $\mathbb{R}^n \in S$, se tiene :

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = L \Leftrightarrow \text{para todo entorno } N(L, \varepsilon) \exists N'(\bar{a}, \delta) \text{ tal que}$$

$$\forall \bar{x} \in N'(\bar{a}, \delta) \text{ se verifica que } f(\bar{x}) \in N(L, \varepsilon)$$

CONTINUIDAD

Dada la función $z = f(x,y)$ con dominio de definición $S \in \mathbb{R}^2$ y un punto $A(\alpha, \beta)$ se dice que la función $z = f(x,y)$ es continua en el punto $A(\alpha, \beta)$ si se cumple la siguiente igualdad :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ y \rightarrow \beta}} f(x,y) = f(\alpha, \beta) \quad (1)$$

Si se considera $x = \alpha + \Delta x$ e $y = \beta + \Delta y$ la ecuación (1) se puede escribir :

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(\alpha + \Delta x, \beta + \Delta y) = f(\alpha, \beta)$$

o sea que pasando al primer miembro $f(\alpha, \beta)$ tendremos :

$$\left[\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(\alpha + \Delta x, \beta + \Delta y) - f(\alpha, \beta) \right] = 0$$

Lo encerrado entre corchetes, representa el valor de Δz luego

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(\alpha + \Delta x, \beta + \Delta y) - f(\alpha, \beta) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$$

Esto nos indica que una función de dos variables es continua en un punto, cuando su incremento se puede hacer tan pequeño como se quiera con tal de hacer tan pequeños como se quiera los incrementos de las variables independientes.

GENERALIZACIÓN

Sea $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\bar{x})$ una función con dominio $S \in \mathbb{R}^n$ y rango $T \in \mathbb{R}^1$, sea $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un punto genérico de S entonces la función $y = f(\bar{x})$ es continua en $\bar{x} = \bar{a}$ si se verifica que :

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} = f(\bar{a})$$

Definición :

La función $y = f(\bar{x})$ es continua en un recinto n - dimensional , si lo es en todos los puntos del mismo.

INFINITESIMOS

Una función $z = \phi(x, y)$ es infinitesimal para $(x, y) \rightarrow (a, b)$ si se verifica que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \phi(x, y) = 0$$

Sean $\phi(x, y)$ y $\theta(x, y)$ dos infinitésimos en $(x, y) \rightarrow (a, b)$ luego :

$$\text{Si } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{\varphi(x, y)}{\theta(x, y)} = \alpha$$

Se dice que $\varphi(x, y)$ y $\theta(x, y)$ son infinitésimos del mismo orden.

Cuando $\alpha = 1$ se los denomina infinitésimos equivalentes.

Si es

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{\varphi(x, y)}{\theta(x, y)} = 0$$

$\varphi(x, y)$ es un infinitésimo de orden superior a $\theta(x, y)$ en el punto (a, b) Si es

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{\varphi(x, y)}{\theta(x, y)} = \infty$, $\varphi(x, y)$ es un infinitésimo de orden inferior a $\theta(x, y)$ en el punto (a, b)

Como infinitésimo de comparación se emplea la siguiente expresión :

$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ luego se puede comparar $\varphi(x, y)$ con ρ y decir que $\varphi(x, y)$ es un infinitésimo de orden p si se verifica que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{\varphi(x, y)}{\rho^p} = \alpha \neq 0$$

Para generalizar a funciones de n variables tendremos :

$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(\bar{x}) = 0$ luego $\varphi(\bar{x})$ es infinitesimal para $(\bar{x}) \rightarrow (\bar{a})$

Se toma como infinitésimo de comparación a $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}$