

# Coordenadas polares

Se denominan *coordenadas polares*,  $(\rho, \theta)$ , de un punto de  $(a, b) \neq (0, 0)$  de  $\mathbb{R}^2$  al módulo  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$  y al argumento  $\theta$ , ángulo entre las semirrectas  $\{(t, 0) : t \geq 0\}$  y  $\{(at, bt) : t \geq 0\}$ .

Recordemos el teorema de cambio de variable para una integral múltiple:

Sea  $g(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  una función inyectiva de un abierto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  cuyas derivadas parciales  $\frac{\partial x}{\partial u}(u, v)$ ,  $\frac{\partial x}{\partial v}(u, v)$ ,  $\frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$ ,  $\frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$  son funciones continuas en todo  $A$ ; entonces, si  $f$  es una función real integrable en  $g(A)$ , se cumple

$$\int_{g(A)} f(x, y) dx dy = \int_A f(g(u, v)) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \right| du dv$$

Aquí  $\det$  denota el determinante de la matriz.

En el caso del cambio a coordenadas polares la aplicación  $g$  es  $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ , o dicho de otra manera,  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ . Por supuesto, la  $u$  es en este caso particular la  $\rho$  y la  $v$  es la  $\theta$ .

Se comprueba fácilmente que  $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\rho, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\rho, \theta) \end{pmatrix} = \rho$ .

El conjunto  $g(A)$  vendrá normalmente dado en el enunciado y nosotros tenemos que hallar el abierto  $A$  adecuado.

En algunas ocasiones se emplean las coordenadas polares *centradas* en otro punto  $(a, b)$  y entonces el cambio a polares quedará así  $x = a + \rho \cos \theta$ ,  $y = b + \rho \sin \theta$ .

Las coordenada polares pueden ser útiles al integrar por dos razones diferentes: primero, porque el recinto de integración se exprese de forma más sencilla en polares (lo que suele ocurrir cuando hay simetría respecto del *centro*  $(a, b)$ ); en segundo lugar, porque sea más fácil hallar primitivas del integrando cuando está expresado en polares. A veces conseguiremos mejorar el recinto de integración y el integrando, pero otras veces valdrá la pena *estropear* el recinto para *mejorar* el integrando, o viceversa.

## Ejemplos

1.  $\int_{\Omega} \frac{dx dy}{1 - x^2 - y^2}$ , en donde  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ .

En este caso,  $\Omega$  es el círculo de centro el origen y radio 1, luego el módulo tiene que variar desde  $\rho = 0$  hasta  $\rho = 1$ , mientras que el argumento  $\theta$  varía entre 0 y  $2\pi$  (una vuelta completa). Así tenemos

$$\int_{\Omega} \frac{dx dy}{1 - x^2 - y^2} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\rho}{1 - \rho^2} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ - (1 - \rho^2)^{1/2} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Nota: el conjunto  $A$  es en este caso  $A = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$ , es decir, el interior de un cuadrado. No debemos preocuparnos por el hecho de que  $g(A)$  no coincida exactamente con  $\Omega$ . Compruébese que  $g(A)$  es el resultado de quitar un segmento a  $\Omega$ . No pasa nada, porque el conjunto que se quita tiene medida cero, por lo que no afecta al resultado de la integral. Habitualmente es innecesario determinar cuál es el conjunto  $A$  en cada caso, basta saber fijar los límites de integración para la  $\rho$  y la  $\theta$ .

2.  $\int_{\Omega} x^2 dx dy$ , en donde  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 < 1\}$

En este caso,  $\Omega$  es el círculo de centro el punto  $(1, 0)$  y radio 1, luego podemos hacer el cambio  $x = 1 + \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ , en donde el módulo tiene que variar desde  $\rho = 0$  hasta  $\rho = 1$ , mientras que el argumento  $\theta$  varía entre 0 y  $2\pi$ . Así se obtiene

$$\int_{\Omega} x^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \rho \cos \theta)^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho + 2\rho^2 \cos \theta + \rho^3 \cos^2 \theta) d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right) d\theta = \frac{5}{4}\pi$$

3.  $\int_{\Omega} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)(4 - x^2 - y^2)^2} dx dy$ , en donde  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 < 1\}$

De nuevo  $\Omega$  es el círculo de centro el punto  $(1, 0)$  y radio 1, pero ahora conviene estropear un poco el recinto para mejorar el integrando (pruébese a efectuar el mismo cambio que en el ejemplo 2 y se verá que se complica todo). Consideramos el cambio  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ , pero ahora la  $\theta$  varía desde  $\frac{-\pi}{2}$  hasta  $\frac{\pi}{2}$  (la circunferencia es tangente al eje  $OY$ , hágase el dibujo). El valor mínimo del módulo es cero (porque la circunferencia pasa por el origen). Para hallar el máximo, sustituímos en la expresión de la circunferencia  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ , y obtenemos  $1 = (\rho \cos \theta - 1)^2 + (\rho \sin \theta)^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta$ . Como  $\rho > 0$ , se deduce que el valor máximo de  $\rho$  es  $\rho = 2 \cos \theta$  para cada  $\theta$ . Finalmente

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)(4 - x^2 - y^2)^2} dx dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 (4 - \rho^2)^2} \rho d\rho d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \frac{\sin^2 \theta}{4 - \rho^2} \right]_{\rho=0}^{\rho=2 \cos \theta} d\theta = \frac{1}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) d\theta = \frac{1}{16}\pi \end{aligned}$$