

Antes de resolver los apartados que señala, conviene comentar lo extraña que resulta la pregunta: ¿es lógico preguntar por las opciones falsas en lugar de hacerlo por las verdaderas?, ¿se supone que hay una única opción falsa?. Además, podría ocurrir, por ejemplo, que un cambio de variable estuviera mal planteado, pero que el resultado de la integral fuera precisamente I .

Le pongo un ejemplo un poco tonto: sabemos que la integral de un producto no es el producto de las integrales. Sin embargo, si a uno le preguntan si la igualdad siguiente es cierta

$$\int_0^{3/2} x^3 dx = \left(\int_0^{3/2} x dx \right) \left(\int_0^{3/2} x^2 dx \right)$$

tiene que constestar que sí (en ambos casos sale $\frac{81}{64}$), aunque es una manera disparatada de calcular la integral.

Tal y como está planteado el ejercicio, casi nos está forzando a resolverlo de la siguiente manera: calculamos por separado las cuatro integrales iteradas y comprobamos cuál da un resultado distinto de las demás. Pero este procedimiento es desaconsejable porque nos da la respuesta, pero no nos enseña nada. Los ejercicios deben servir para aclarar conceptos y para plantearnos cuestiones en las que ni siquiera habíamos reparado. Si calculamos las cuatro integrales iteradas y comparamos los resultados, no habremos aprendido absolutamente nada sobre el paso de una integral doble a una iterada ni sobre el cambio de variable

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_2^{4-y} \frac{1}{x+y} dx \right) dy &= -2 \ln 2 + 2 \\ \int_2^4 \left(\int_0^{4-x} \frac{1}{x+y} dy \right) dx &= -2 \ln 2 + 2 \\ \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\frac{4}{\sin \theta + \cos \theta}} \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} dr \right) d\theta &= 4 \\ \int_2^4 \left(\int_2^v \frac{1}{v} du \right) dv &= -2 \ln 2 + 2 \end{aligned}$$

Creo que un ejercicio como este, que parece destinado a comprobar si el alumno sabe pasar de una integral doble a unas iteradas y si sabe cambiar de variable, debería plantearse con un integrando genérico $f(x, y)$.

En cualquier caso, debemos intentar dar una buena respuesta a una mala pregunta. Creo que comprende bien los apartados a) y b). En los apartados c) y d) se pretende, al parecer, comprobar si se sabe hacer un cambio de variable. Vamos a aplicar a la integral dos cambios diferentes

1º. Si queremos utilizar coordenadas polares, resulta lógico centrarlas en el punto $(2, 0)$. Es decir, $x = 2 + r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ de manera que θ varíe entre 0 y $\pi/2$ mientras que r varía, para cada θ , entre 0 un valor $r(\theta)$ que vamos a determinar: trazamos una semirrecta con origen en el punto $(2, 0)$ que forme ángulo θ con el semieje OX positivo; esa semirrecta corta a la recta $x + y = 4$ en el punto $(2 + r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$, así que $(2 + r(\theta) \cos \theta) + (r(\theta) \sin \theta) = 4$, de donde

$$r(\theta) = \frac{2}{\cos \theta + \sin \theta}$$

en consecuencia

$$\int_S \frac{1}{x+y} dx dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\frac{2}{\cos \theta + \sin \theta}} \frac{r}{2 + r \cos \theta + r \sin \theta} dr \right) d\theta$$

2º. Ahora probamos con el cambio $u = x$, $v = x + y$. La recta $x + y = 4$ se transforma en la recta $v = 4$, mientras que el eje OX , que es la recta $y = 0$, se transforma en la recta $u = v$. Evidentemente, la recta $x = 2$ se transforma en $u = 2$.

Como la transformación es lineal, nuestro triángulo en las coordenadas x, y se transforma en el triángulo de vértices $(2, 2), (2, 4), (4, 4)$, en las coordenadas u, v .

El jacobiano de la transformación $x = u, y = v - u$ es

$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1$$

luego

$$\int_S \frac{1}{x+y} dx dy = \int_2^4 \left(\int_u^4 \frac{1}{v} dv \right) du$$

o integrando en el orden contrario

$$\int_S \frac{1}{x+y} dx dy = \int_2^4 \left(\int_2^v \frac{1}{v} du \right) dv$$

Nota: no resulta nada recomendable emplear polares centradas en el origen, pero puede hacerse.