

4- Inferencia estadística y contraste de hipótesis

La inferencia estadística estudia el proceso inverso a la teoría de probabilidades. La teoría de probabilidades estudia, conocidas las características de la población, la probabilidad de obtener una determinada muestra de la misma. La inferencia estadística pretende, dadas las frecuencias observadas de una variable en una muestra, inferir las características de toda la población.

La población es el conjunto de elementos en que se estudia una determinada característica. Frecuentemente no es posible estudiar todos ellos y se escoge una parte de ellos: una muestra. Las conclusiones acerca de la población extraídas a partir de la muestra son necesariamente inciertas, ya que la muestra es sólo una pequeña parte de la población.

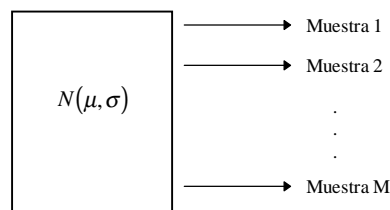
4.1- Estimación

4.1.1.- Intervalo de confianza para la media de una distribución normal

Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias IID con media μ y varianza $\sigma^2 > 0$, ambas finitas. En esta sección discutiremos cómo estimar un intervalo de confianza para μ con el % de confianza deseado.

La interpretación del intervalo de confianza es: si se construyen muchos intervalos con el $100(1-\alpha)\%$ de confianza, basado cada uno en un conjunto de n observaciones X_1, \dots, X_n IID, con n suficientemente grande, la proporción de estos intervalos de confianza que contiene a μ es $(1-\alpha)$.

Para comprender el método de estimación del intervalo de confianza para la media μ supongamos que se toman M muestras, de n elementos cada una, de una distribución $N(\mu, \sigma)$.



Si se calcula la media de cada muestra de n elementos, se obtienen M valores $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_M$. La media de una muestra que se toma de una población $N(\mu, \sigma)$ es una variable aleatoria distribuida, de acuerdo con el teorema del límite central, $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Por tanto, las medias $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_M$ están distribuidas $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\bar{X} \Rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{es equivalente a} \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow N(0,1)$$

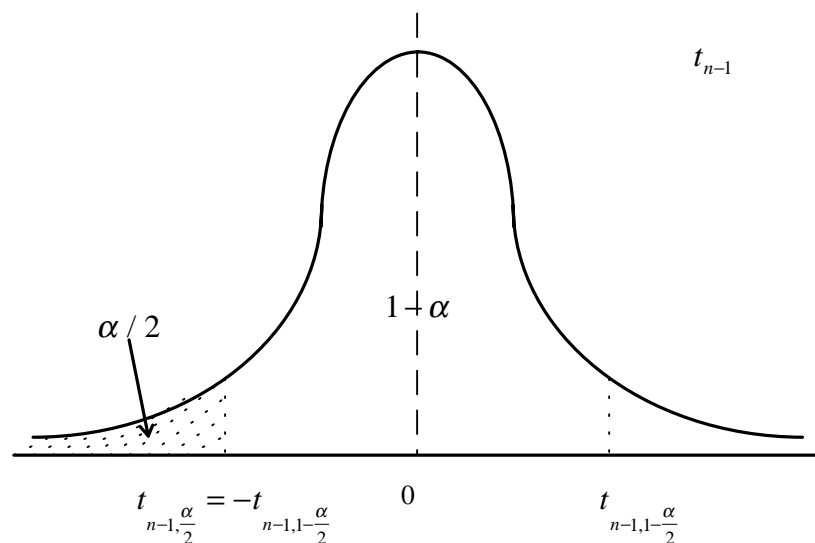
Si sustituimos en esta última expresión σ por su estimador, $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$, la variable aleatoria resultante no está distribuida normalmente, sino de acuerdo a la distribución t de Student con n-1 grados de libertad. Esto es:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow N(0,1) \qquad \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \Rightarrow T_{n-1}$$

La distribución t de Student es simétrica respecto al origen, es menos picuda que la $N(0,1)$ y tiene las colas más largas que ésta. Se cumple: $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1)$

El punto crítico $t_{v,\chi}$ es el valor de la variable aleatoria T_v , distribuida t de Student con v grados de libertad, que cumple: $P\{T_v \leq t_{v,\chi}\} = \chi$. Dado que la distribución es simétrica respecto del origen, los puntos críticos cumplen: $-t_{v,\chi} = t_{v,1-\chi}$. Ver Tabla I.

De lo anterior se deduce que la probabilidad de que la variable aleatoria $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ tome valores en el intervalo $\left[-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ es igual a $(1-\alpha)$. Es decir, $\left[-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ es un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para la variable aleatoria $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$.



Operando obtenemos el intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para μ :

$$-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}} \rightarrow \bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Resumiendo todo lo dicho:

Si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias *normales* IID de media μ y varianza $\sigma^2 > 0$, la variable aleatoria t , calculada de la forma:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

tiene una distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad y el intervalo:

$$\bar{X} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

es un intervalo de confianza *exacto* (para cualquier $n > 1$) del $100(1-\alpha)\%$ para μ , donde

$t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ es el punto crítico $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la distribución t con $n-1$ grados de libertad (ver Tabla I).

Ejemplo. Supongamos que hemos realizado $n=10$ observaciones IID de una distribución normal $N(\mu, \sigma)$ de media y varianza desconocidas:

0.202, 0.498, 0.680, 0.888, 0.486, 0.089, -0.048, 0.583, 0.553, -0.497

Se desea construir un intervalo de confianza del 90% para μ .

$$100(1-\alpha) = 90 \rightarrow \alpha = 0.1$$

De los datos experimentales calculamos:

$$\bar{X} = 0.343 ; \quad s^2 = 0.167 ;$$

con lo cual el intervalo de confianza es:

$$\bar{X} \pm t_{9, 0.95} \sqrt{\frac{s^2}{10}} = 0.343 \pm 1.833 \sqrt{\frac{0.167}{10}} = 0.343 \pm 0.237$$

donde el valor de $t_{9, 0.95}$ se ha tomado de la Tabla I. Así pues, podemos decir con un 90% de confianza que μ se encuentra en el intervalo $[0.106, 0.580]$.

Hemos visto cómo obtener el intervalo de confianza para la media de una distribución normal. Supongamos ahora que deseamos calcular el intervalo de confianza para la media de una distribución no normal.

Supongamos una distribución cualquiera de media μ y varianza σ^2 de la cual tomamos n observaciones independientes X_1, \dots, X_n . El teorema del límite central afirma que si n es *suficientemente grande* la media de estas observaciones, \bar{X} , es una variable aleatoria distribuida $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. El teorema sigue siendo válido si sustituimos σ^2 por la cuasivarianza,

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}. \text{ Esto es: si } n \text{ es } \textit{suficientemente grande} \text{ la media de estas observaciones, } \bar{X}, \text{ es}$$

una variable aleatoria distribuida $N\left(\mu, \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$.

Esto nos permite construir el intervalo de confianza para μ como $\bar{X} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{n}}$, aunque

la distribución no sea normal, siempre y cuando n sea *suficientemente grande*. Como vemos, si la distribución no es normal, el intervalo de confianza es sólo aproximado en términos de recubrimiento.

4.1.2- Intervalo de confianza para la varianza de una distribución normal

Supongamos que deseamos estimar la varianza σ^2 de una variable aleatoria distribuida $N(\mu, \sigma)$ a partir de un conjunto de n observaciones independientes X_1, \dots, X_n .

A partir de estas observaciones podemos calcular los estimadores de la media y de la varianza:

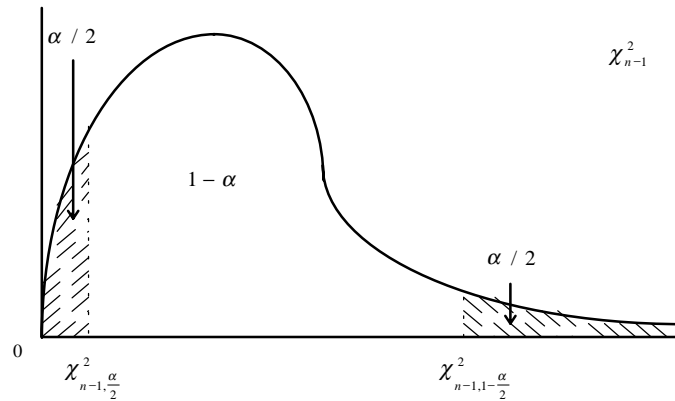
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Puede demostrarse que la variable aleatoria

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2$$

esta distribuida chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad: $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \Rightarrow \chi_{n-1}^2$.

La probabilidad de que el valor de la variable aleatoria $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ se encuentre en el intervalo $\left[\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}, \chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$ es igual a $(1-\alpha)$, donde $\chi^2_{v, \gamma}$ satisface $P\{\chi^2_v \leq \chi^2_{v, \gamma}\} = \gamma$. Ver Tabla IV.



Operando, podemos obtener el intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ para σ^2 :

$$\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \rightarrow \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}}$$

Ejemplo. Un laboratorio, para determinar la concentración de una sustancia tóxica disuelta en el agua residual de un proceso químico, toma 16 muestras. Supone, en base a la experiencia, que la concentración esta distribuida aproximadamente de forma normal. Los resultados del análisis, en miligramos por litro, son:

5.176	5.075	4.694	4.889	4.920	4.929	4.800	5.216
5.157	4.986	4.790	4.810	5.207	4.996	5.166	4.972

La ley determina que el máximo permitido es de 5.1 mg/l. ¿Se puede afirmar con una confianza del 95% que este proceso cumple la normativa?. Dar un intervalo de confianza del 95% para la desviación típica.

Solución. Calculamos los estimadores de la media y de la desviación estándar:

$$\bar{X} = 4.986 \text{ mg/l} \quad s = 0.166 \text{ mg / l}$$

los intervalos de confianza del 95% para la media y la varianza son:

$$\bar{X} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{n}} = 4.986 \pm 2.131 \sqrt{\frac{0.166^2}{16}} = 4.986 \pm 0.088 \rightarrow 4.898 \leq \mu \leq 5.074$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}} \rightarrow \frac{(15)0.166^2}{27.488} \leq \sigma^2 \leq \frac{(15)0.166^2}{6.26} \rightarrow 0.015 \leq \sigma^2 \leq 0.066$$

Dado que el intervalo para la media no incluye 5.1 mg/l podemos afirmar con una confianza del 95% que el proceso cumple la normativa.

4.1.3- Intervalo de confianza para la proporción de una distribución binomial

Una variable aleatoria discreta X está distribuida binomialmente cuando representa el número de eventos que se producen en n experimentos independientes de Bernoulli (experimentos con 2 posibles resultados: sucede el evento o no), donde la probabilidad de que suceda el evento en cada experimento es p . Entonces $X \Rightarrow \text{bin}(n, p)$. La probabilidad p recibe el nombre de proporción.

Supongamos, por ejemplo, que en una población de N bolas (N muy grande) la proporción de bolas negras es p . Las bolas pueden ser o blancas o negras. Se desea estimar la proporción p de bolas negras. Para ello se extrae una muestra de n bolas de la población. El tamaño muestral n es $n \ll N$, con lo cual podemos considerar que, pese a no reponer la bola a la población tras examinarla, el número de bolas negras de la muestra, r , está distribuido $r \Rightarrow \text{bin}(n, p)$. La aproximación $r \Rightarrow N(np, \sqrt{np(1-p)})$ suele ser aceptable si $np > 5$.

A partir de la muestra podemos estimar la proporción de bolas negras de la población:

$$\hat{p} = \frac{r}{n}$$

donde r es el número de bolas negras de la muestra y n el número total de bolas (blancas + negras) de la misma. El estimador de la proporción es una variable aleatoria cuya distribución, si $np > 5$, puede aproximarse:

$$\hat{p} = \frac{r}{n} \Rightarrow N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

de donde:

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \Rightarrow N(0,1)$$

lo cual permite construir un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para la proporción, ya que:

$$P\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

donde los puntos críticos z_{γ} son aquellos que cumplen $P\{Z \leq z_{\gamma}\} = \gamma$ con $Z \Rightarrow N(0,1)$.

El intervalo de confianza es del $100(1-\alpha)\%$ para la proporción:

$$\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

4.2- Contraste de hipótesis paramétricas

Una hipótesis estadística paramétrica es una suposición acerca del valor de uno o mas parámetros de un modelo estadístico. Por ejemplo, que la media de una distribución tenga un determinado valor, que dos distribuciones tengan la misma varianza, etc.. El contraste de la hipótesis es un proceso para establecer la validez de la misma y se realiza a partir de una muestra X_1, X_2, \dots, X_n de la distribución.

En general, se sigue el convenio de llamar hipótesis nula y notarla H_0 a aquella que tratamos de comprobar. La hipótesis alternativa se nota H_1 . Por ejemplo, supongamos que la distribución de una variable aleatoria X es una función conocida $F(x, \theta)$ dependiente del parámetro θ . Se desea contrastar la hipótesis $\theta = \theta_0$ frente a la hipótesis $\theta \neq \theta_0$, donde θ_0 es una constante. Se notaría:

$$\begin{aligned} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta \neq \theta_0 \end{aligned}$$

El propósito del contraste de la hipótesis no es determinar si H_0 o H_1 son ciertas, sino establecer si existe evidencia suficiente para rechazar H_0 . Los términos “aceptar” y “rechazar” deben ser interpretados en este contexto. Así, no rechazar la hipótesis nula no significa haber demostrado que es cierta, sino significa que no hay evidencia suficiente en la muestra para afirmar que es falsa.

La metodología del contraste de hipótesis paramétricas es:

- 1.- Establecer las hipótesis: definir H_0 y H_1 .
- 2.- Determinar una medida de la discrepancia entre la muestra X_1, X_2, \dots, X_n y la hipótesis nula. Esta medida, que notaremos $d(\theta_0, X_1, \dots, X_n)$, debe ser función de la muestra y del parámetro θ .
- 3.- Determinar para que valor de la discrepancia, d_0 , se rechaza la hipótesis nula:

$$\begin{aligned} d(\theta_0, X_1, \dots, X_n) \leq d_0 & \quad \text{no hay evidencia para rechazar } H_0 \\ d(\theta_0, X_1, \dots, X_n) > d_0 & \quad \text{se rechaza } H_0 \end{aligned}$$
- 4.- Tomar la muestra y aplicar el contraste.

Al realizar el contraste de una hipótesis pueden cometerse dos tipos de errores:

Error de tipo I: rechazar H_0 cuando es verdadera.

Error de tipo II: no rechazar H_0 cuando es falsa. Supone rechazar la hipótesis complementaria H_1 , que es verdadera.

Se definen las probabilidades de cometer estos errores:

$$\begin{aligned} \alpha &= P\{\text{Error tipo I}\} = P\{\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadera}\} \\ \beta &= P\{\text{Error tipo II}\} = P\{\text{No rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}\} \end{aligned}$$

donde:

α se llama *nivel de significación* del test. Lo fija el experimentador.

β se llama *característica de operación* del test. Depende de la forma de H_1 y suele ser desconocido.

Al determinar para qué valor de la discrepancia, d_0 , se rechaza la hipótesis nula se está fijando en nivel de significación α del test. Para un tamaño muestral n fijo, la reducción de α conlleva el aumento de β . Aumentando el tamaño muestral puede reducirse β .

La probabilidad de rechazar H_0 cuando es falsa:

$$P = 1 - \beta = P\{\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}\}$$

recibe el nombre de *potencia del test*. Para α y H_1 fijas, la potencia del test sólo puede aumentarse aumentando el tamaño muestral n . Dado que la potencia del test puede ser pequeña y desconocida para nosotros, prudentemente suele decirse que el test “no rechaza” (en vez de “acepta”) H_0 cuando t no cae en la región crítica. Cuando la hipótesis H_0 no es rechazada por el test, generalmente no sabemos con qué probabilidad podemos afirmar que H_0 es cierta.

4.2.1.- Respecto a la media de una distribución normal

Supongamos que se toma una muestra de una distribución $N(\mu, \sigma)$ consistente en n observaciones independientes X_1, \dots, X_n . Se desea contrastar:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

donde μ_0 es un valor fijo. Intuitivamente, cabe pensar que si la distancia entre la media y su estimador es grande, $|\bar{X} - \mu_0|$, será poco probable que H_0 sea cierta.

Para realizar el test necesitamos un estadístico (una función de la muestra X_1, \dots, X_n y de μ_0) cuya distribución sea conocida cuando H_0 sea cierta:

Si H_0 es cierto (si $\mu = \mu_0$) el estadístico $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ tiene una distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad y $\bar{X} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{n}}$ es un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para μ_0 .

El modo de contrastar la hipótesis es:

- 1.- A partir de la muestra, construir un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para la media.
- 2.- Examinar si μ_0 se encuentra dentro del intervalo.

Si μ_0 está dentro del intervalo, no hay evidencia para rechazar la hipótesis nula.

Si está fuera, se rechaza la hipótesis nula.

La condición de que μ_0 este dentro del intervalo de confianza es:

$$\begin{aligned} \bar{X} - t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu_0 \leq \bar{X} + t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{n}} &\rightarrow -t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \leq t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \\ \rightarrow -t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \leq t \leq t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Con lo cual, para realizar el contraste de la hipótesis debe evaluarse

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

y decidir de acuerdo con:

$$si \quad |t| \begin{cases} > t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} & \text{se rechaza } H_0 \\ \leq t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} & \text{no se rechaza } H_0 \end{cases}$$

La porción de la recta real que corresponde al rechazo de la hipótesis H_0 , $\left\{x: |x| > t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$,

se llama *región crítica del test*.

El *nivel de significación* α del test, que es la probabilidad de que el estadístico t caiga en la región crítica del test siendo H_0 verdadera (proporción de los intervalos de confianza que no contienen a la media, esto es, probabilidad de que un intervalo de confianza no contenga la media) es escogido por el experimentador. Normalmente se suele escoger un nivel α igual a 0.05 ó 0.1. Por ejemplo, si $\alpha = 0.05$ y el test rechaza H_0 , podemos estar seguros en un 95% de haber tomado la decisión correcta.

Ejemplo. Se ha tomado una muestra consistente en 10 observaciones de una distribución normal $N(\mu, \sigma)$ de media y varianza desconocidas:

0.202, 0.498, 0.680, 0.888, 0.486, 0.089, -0.048, 0.583, 0.553, -0.497

Se desea comprobar la hipótesis $H_0: \mu = 0$ con nivel $\alpha = 0.1$.
 $H_1: \mu \neq 0$

Calculamos

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{0.343 - 0}{\sqrt{\frac{0.167}{10}}} = 2.654$$

y de la tabla I, obtenemos $t_{9, 0.95} = 1.833$. Como $|t| > t_{9, 0.95}$, la hipótesis tiene una probabilidad del 90% de ser falsa. Rechazamos la hipótesis.

4.2.2.- Respecto a la varianza de una distribución normal

Supongamos que deseamos contrastar la siguiente hipótesis acerca de la varianza de una variable aleatoria distribuida $N(\mu, \sigma)$:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Para ello se toma una muestra n observaciones independientes X_1, \dots, X_n , de la cual se calcula el estimador de la varianza:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

El estadístico (una función de la muestra X_1, \dots, X_n y de σ_0^2), cuya distribución es conocida cuando H_0 sea cierta, es:

Si H_0 es cierto (si $\sigma^2 = \sigma_0^2$) el estadístico $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \Rightarrow \chi_{n-1}^2$ tiene el intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$:

$$\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2$$

Con lo cual, para realizar el contraste de la hipótesis debe evaluarse

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

y decidir de acuerdo con:

$$\text{si } \chi_0^2 \begin{cases} \in \left[\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2, \chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2 \right] & \text{no se rechaza } H_0 \\ \notin \left[\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2, \chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2 \right] & \text{se rechaza } H_0 \end{cases}$$

4.2.3.- Respecto a la proporción de una distribución binomial

Consideremos de nuevo la población de N bolas blancas y negras (N muy grande) donde la proporción de bolas negras es p. Se desea contrastar la hipótesis:

$$H_0: p = p_0$$

$$H_1: p \neq p_0$$

Para ello se extrae una muestra de n bolas de la población. El tamaño muestral n es $n \ll N$, con lo cual podemos considerar que, pese a no reponer la bola a la población tras examinarla, el número de bolas negras de la muestra, r, está distribuido $r \Rightarrow \text{bin}(n, p)$. La aproximación $r \Rightarrow N(np, \sqrt{np(1-p)})$ suele ser aceptable si $np > 5$.

El estimador de la proporción es una variable aleatoria cuya distribución, si $np > 5$, puede aproximarse:

$$\hat{p} = \frac{r}{n} \Rightarrow N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right), \quad \text{con lo cual:} \quad z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \Rightarrow N(0,1)$$

Para realizar el contraste debe calcularse

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

y decidir de acuerdo con:

$$\left\{ \begin{array}{l} |z_0| \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ no hay evidencia para rechazar } H_0 \\ |z_0| > z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ se rechaza } H_0 \end{array} \right.$$