

10.- Técnicas de reducción de la varianza

10.1- Finalidad

Toda simulación cuyas entradas sean variables aleatorias produce salidas aleatorias, que deben ser analizadas e interpretadas siguiendo técnicas estadísticas, lo cual, a menudo, resulta excesivamente costoso. El coste computacional de realizar un análisis estadístico apropiado de las salidas puede ser tan alto que sea irrealizable, obteniéndose unos resultados con una precisión (medida por la anchura del intervalo de confianza) inaceptablemente pobre.

Además de programar el modelo eficientemente, para maximizar la velocidad de ejecución y minimizar los requerimientos de almacenamiento en memoria, debe optimizarse la *eficiencia estadística*. La eficiencia estadística se mide mediante las varianzas de las variables aleatorias de salida de la simulación. Si se consigue reducir la varianza de una variable aleatoria de interés, sin alterar su valor esperado, podremos obtener, con la misma carga computacional de simulación, mayor precisión (intervalos de confianza más pequeños) en su estimación.

La forma en que se aplican las técnicas de reducción de la varianza y la reducción conseguida dependen del modelo en particular. Más aun, normalmente es imposible saber de antemano si la aplicación de alguna de estas técnicas supondrá una reducción o un aumento de la varianza de las salidas. Por ello, deben realizarse algunas ejecuciones piloto para comparar los resultados de aplicar técnicas de reducción de la varianza con los de realizar directamente la simulación sin aplicarlas.

La aplicación de estas técnicas supone un aumento en la carga computacional de la simulación, con lo cual, debe sopesarse si compensa el aumento de la eficiencia estadística con la disminución de la eficiencia computacional.

Consideremos a continuación algunas de estas técnicas.

10.2- Números aleatorios comunes.

La técnica de reducción de la varianza de los números aleatorios comunes es aplicable cuando se están comparando varios sistemas alternativos. La idea básica de la técnica es comparar los sistemas "bajo condiciones experimentales similares", de modo que aumente la seguridad de que las diferencias de comportamiento observadas son debidas a la naturaleza de los sistemas y no a fluctuaciones en las "condiciones experimentales".

En simulación, las condiciones experimentales son los valores que adquieren las variables aleatorias de entrada de los modelos. El nombre de la técnica viene de la posibilidad, en algunas situaciones, de usar una secuencia de números aleatorios $U(0,1)$ común para alimentar cada uno de los distintos modelos a lo largo del tiempo.

A fin de entender más claramente la idea, supongamos que debemos comparar dos sistemas alternativos. Sean X_{1j} y X_{2j} , con $j=1,\dots,n$, las observaciones del primer y segundo sistema, respectivamente, en la replicación j -ésima de la simulación. Se desea estimar $\xi = E(X_{1j}) - E(X_{2j})$.

Las diferencias, $Z_j = X_{1j} - X_{2j}$ con $j:1,2,\dots,n$, tienen como valor esperado y media aritmética:

$$E(Z_j) = \xi \qquad \bar{Z} = \frac{\sum_{j=1}^n Z_j}{n}$$

donde la media aritmética \bar{Z} es un estimador no sesgado del valor esperado ξ . Supuesto que las Z_j 's son variables aleatorias IID:

$$Var(\bar{Z}) = \frac{Var(Z_j)}{n} = \frac{Var(X_{1j}) + Var(X_{2j}) - 2Cov(X_{1j}, X_{2j})}{n}$$

Si las simulaciones de los dos sistemas se realizan independientemente, es decir, si se usan secuencias de números aleatorios separadas para X_{1j} y X_{2j} , se satisfará $Cov(X_{1j}, X_{2j}) = 0$. Por el contrario, si pudieran llevarse a cabo las simulaciones de los dos sistemas, de modo que X_{1j} y X_{2j} estuvieran correlacionadas positivamente, $Cov(X_{1j}, X_{2j}) > 0$, entonces la varianza del estimador \bar{Z} se reduciría.

La técnica de los números aleatorios comunes trata de inducir esta correlación positiva, si bien, no existe garantía de que el método funcione para un caso en concreto, ni tampoco existe un procedimiento de estimar a priori la reducción. Obsérvese que el método puede incluso producir un aumento en la varianza si se induce una $Cov(X_{1j}, X_{2j}) < 0$.

Ejemplo. Volvamos al caso en el cual había que decidir entre instalar en el banco una máquina modelo ZZ o dos modelo Z. Para ello se simulaba, con $\rho = 0.9$, el tiempo medio de espera por cliente de los 100 primeros clientes, supuesto que el primer cliente encontraba el sistema libre. Sean X_{1j} y X_{2j} , con $j=1,\dots,100$, los tiempos medios de espera de los primeros 100 clientes para el sistema ZZ y Z respectivamente. Hay dos entradas aleatorias: los intervalos entre las llegadas sucesivas de clientes y los tiempos de servicio. La aplicación del método puede consistir en generar, en cada replicación, para el sistema ZZ los valores aleatorios de los intervalos entre llegadas y de los tiempos de servicio y, a continuación, emplear para el sistema Z, los mismos valores de los intervalos entre llegadas y unos valores de los tiempos de servicio que sean el doble de los empleados para ZZ.

A fin de estimar los efectos de la aplicación del método se realizan 4 experimentos completos, en cada uno de los cuales se realizan 100 simulaciones de cada sistema, ZZ y Z. En el primer experimento, que notaremos I, los tiempos entre llegadas y de servicio de los dos sistemas son generados independientemente. En el segundo experimento, que notaremos A, los tiempos entre llegadas de los dos sistemas son los mismos, pero los tiempos de servicio son independientes. En el tercer experimento, que notaremos S, los intervalos entre llegadas son independientes, pero los tiempos de servicio del sistema Z se escogen iguales al doble de los del sistema ZZ. Finalmente, el cuarto experimento, que notaremos A&S, se escogen los mismos intervalos entre llegadas y los tiempos de servicio de Z el doble que los de ZZ.

De cada experimento, consistente en 100 simulaciones de cada sistema, se estima $Var(Z_j)$ de

la forma:
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{100} (Z_j - \bar{Z})^2}{99}.$$

Se calcula también la proporción \hat{p} , de las 100 parejas, en que se hubiera tomado la decisión incorrecta, es decir, aquellas es que $X_{1j} < X_{2j}$. Los resultados obtenidos son:

	I	A	S	A&S
$\hat{\sigma}^2$	25.491	11.647	10.473	0.103
\hat{p}	0.44	0.37	0.40	0.05

Los resultados indican que para un número dado de replicaciones de los dos sistemas, el intervalo de confianza para ξ , obtenido por el método de los emparejamientos, será 16 veces más pequeño en el experimento A&S que en el experimento I. Por otra parte, si se desea una determinada precisión para la estima \bar{Z} de ξ , el experimento I requerirá unas 247 veces más replicaciones para cada sistema que el experimento A&S.

10.3- Variables aleatorias antitéticas

Esta técnica de reducción de la varianza es aplicable a la simulación de un único sistema. La idea central del método es realizar las replicaciones de la simulación del sistema por parejas y de modo tal que las dos observaciones de salida estén correlacionadas negativamente. La media de las dos observaciones estará más próxima al valor esperado de la observación que queremos estimar de lo que estaría si se hubieran realizado las replicaciones independientemente.

El modo de introducir correlación negativa entre las dos observaciones es emplear números aleatorios complementarios en las dos replicaciones emparejadas. Es decir, si U_k es una variable aleatoria $U(0,1)$, empleada en la primera replicación del par con un propósito particular, se emplea $1 - U_k$ en la segunda replicación, con ese mismo propósito (téngase en cuenta que se U_k es $U(0,1)$, entonces $1 - U_k$ es también $U(0,1)$).

Para entender el fundamento del método supongamos que n pares de realizaciones de la simulación de un sistema dan en las siguientes observaciones: $(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}), \dots, (X_n^{(1)}, X_n^{(2)})$, de modo que cada par es independiente de los demás. Sea $X_j = \frac{X_j^{(1)} + X_j^{(2)}}{2}$ la media de la pareja de observaciones j -ésima.

La media de las medias de las parejas, $\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n}$, es un estimador no sesgado de

$$\mu = E(X_j^{(1)}) = E(X_j^{(2)}) = E(X_j) = E(\bar{X})$$

con lo cual, dado que las observaciones X_j 's son variables aleatorias IID, obtenemos:

$$Var(\bar{X}) = \frac{Var(X_j)}{n} = \frac{Var(X_j^{(1)}) + Var(X_j^{(2)}) + 2Cov(X_j^{(1)}, X_j^{(2)})}{4n}$$

Si las dos replicaciones del par se realizan independientemente, $Cov(X_j^{(1)}, X_j^{(2)}) = 0$. En cambio, si se induce correlación negativa entre $X_j^{(1)}$ y $X_j^{(2)}$ se obtendrá $Cov(X_j^{(1)}, X_j^{(2)}) < 0$, lo cual reduce $Var(\bar{X})$, como se desea.

Al igual que sucedía con la técnica anterior, no existe garantía de que esta reducción vaya a conseguirse y su cuantía depende igualmente del modelo en concreto, con lo cual debe hacerse un estudio piloto para determinar si la técnica es o no apropiada para el caso en concreto.

La condición básica que debe satisfacer el modelo para que la técnica sea aplicable es que un valor grande de U_k , usado para un propósito particular en el modelo, debe tener un efecto opuesto sobre la respuesta final del que tendría si ese mismo U_k si fuera pequeño. Así pues, U_k inducirá un efecto opuesto en $X_j^{(1)}$ del que inducirá $1 - U_k$ en $X_j^{(2)}$. Como se desea que este comportamiento antagónico de los U_k 's se propague a las variables aleatorias de entrada al modelo, es recomendable emplear el método de la transformación inversa para generarlas: si U_k es grande, $Y^{(1)} = F^{-1}(U_k)$ será grande y $Y^{(2)} = F^{-1}(1 - U_k)$ será pequeño, ya que la función distribución inversa, F^{-1} , es monótona creciente. Para que la técnica funcione, la respuesta final del sistema deberá ser, en cierto sentido, monótona respecto a las variables de entrada: si Y es la variable de entrada y X es la salida, entonces valores grandes y pequeños de Y deben producir valores grandes y pequeños de X, respectivamente (o viceversa).

Debe quedar claro que si se usa U_k para un propósito particular en la primera replicación del par, para obtener $X_j^{(1)}$, entonces debe usarse $1 - U_k$ para el mismo propósito en la otra replicación, para obtener $X_j^{(2)}$.

Ejemplo. Consideremos el sistema formado por una cola atendida por un único empleado, del cual desea estimarse el tiempo medio de espera en la cola por cliente de los primeros 100 clientes. De la estructura del modelo, parece razonable suponer que si aumenta el intervalo entre llegadas sucesivas de clientes disminuirá el tiempo medio de espera (y viceversa) y que, si aumenta el tiempo de servicio, aumentará el tiempo de espera (y viceversa). Así pues, si se usa el método descrito para generar los intervalos entre llegadas y los tiempos de espera (ambas variables aleatorias están distribuidas exponencialmente), cabe esperar que se introduzca una correlación negativa entre los tiempos medios de espera de las replicaciones emparejadas, $X_j^{(1)}$ y $X_j^{(2)}$.

Realizando 100 pares independientes de replicaciones, con $\rho = 0.9$, obtenemos:

- generando los números aleatorios independientemente en cada replicación del par (de modo que $Cov(X_j^{(1)}, X_j^{(2)}) = 0$), se obtiene una estimación de $Var(X_j)$ igual a 6.355.
- generando los números aleatorios sincronizadamente, de acuerdo con el método (intentando con ello obtener $Cov(X_j^{(1)}, X_j^{(2)}) < 0$), se obtiene una estimación de $Var(X_j)$ igual a 2.731.