

## EJERCICIOS DEL TEMA 5 PROPUESTOS EN EXÁMENES

1. Al estimar una proporción con valor poblacional igual a 0.3 mediante la proporción observada en una muestra aleatoria simple de 9 personas, el error típico de la estimación es:

- a) 0.15 b) 0.21 c) 0.65

**Solución.-**

**a) 0,15**

Explicación: El error típico de estimación es  $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \frac{\sqrt{0,3 \cdot 0,7}}{3} \cong 0,15$

2. En una muestra de 100 personas seleccionadas al azar en una población., se obtiene que el nº medio de ellas que asisten al teatro durante un mes es de 21 con una desviación típica muestral de 4. Entonces, el intervalo de confianza del 95 % para el parámetro asistencia media mensual al teatro de la población es:

- a) ( 20,965;21,591) b) (19,684;23,159) c) (20,216;21,784)

**Solución.- c) (20,216;21,784)**

Explicación: Como estimador de la varianza usaremos la cuasivarianza muestral:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{100}{99} \cdot 16 \cong 16,16 \text{ de donde el error típico de estimación será } \tilde{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \cong 0,4020.$$

En las tablas de la normal  $N(0,1)$  encontramos el intervalo de probabilidad 0,95, a saber  $(-1,96 ; 1,96)$ , luego el intervalo de confianza pedido es  $(21 - 1,96 \cdot 0,4020 : 21 + 1,96 \cdot 0,4020) = (20,212 ; 21,787)$

3. ¿Cuál debe ser el tamaño de una muestra si queremos tener la seguridad de que el error típico de estimación de la proporción sea inferior a 0.02?

- a)  $n = 1112$ ; b)  $n = 860$ ; c)  $n = 625$

**Solución.- c)  $n = 625$**

Explicación: El error típico de estimación es menor que  $\frac{0,5}{\sqrt{n}}$ , luego bastará que

$$\frac{0,5}{\sqrt{n}} \leq 0,02 \rightarrow \sqrt{n} \geq \frac{0,5}{0,02} = 25 \rightarrow n \geq 625.$$

4. Una empresa desea saber la proporción  $p$  de solteros que hay entre sus 8000 empleados, para ello escoge al azar y sin reemplazamiento a 500 de ellos, observando que entre ellos hay 40 empleados solteros. Con un grado de seguridad del 99 %, ¿entre qué porcentajes están los solteros en la empresa?

- a) Entre el 4.98% y el 11.02% ; b) Entre el 5.71% y el 10.29% ; c) Entre el 7.18 % y el 14.86%

**Solución.- a) Entre el 4.98% y el 11.02%**

Explicación: Puesto que el muestreo se hace sin reemplazamiento, la proporción es

aproximadamente normal  $\mathcal{N}\left(p, \sqrt{\left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{p(1-p)}{n}}\right) =$  (en el caso del ejercicio) =

$$\mathcal{N}\left(0,08, \sqrt{\left(1 - \frac{500}{8000}\right) \frac{0,08 \cdot 0,92}{500}}\right) \cong \mathcal{N}(0,08, 0,017473). \text{ Para la normal tipificada, el intervalo}$$

central de probabilidad 0,99 es  $[-2,58, 2,58]$ , luego poniendo  $-2,58 < \frac{p - 0,08}{0,017473} < 2,58$  se obtiene que  $0,049741 < p < 0,110259$ .

**5.-** Se quiere realizar entre los 300 alumnos de una institución, de las que 180 son alumnas, un estudio sobre su puntualidad a la hora de entrar en clase, obteniendo un retraso medio de 5 minutos en las alumnas y de 3 minutos en los alumnos con unas cuasidesviaciones típicas de 3,6 para la alumnas y de 2,8 para los alumnos. ¿Cuál será, al nivel de confianza del 99 %, el intervalo de confianza para la diferencia de medias? (06-feb-A)

a)  $I = (1.045; 2.955)$ ; b)  $I = (2.613; 3.517)$ ; c)  $(0.895; 1.629)$

**Solución.- a)  $I = (1.045; 2.955)$**

Explicación: El error típico de estimación para la diferencia de medias es

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{3,6^2}{180} + \frac{2,8^2}{120}} \cong 0,37$$

En las tablas de la normal  $N(0,1)$  encontramos el intervalo de probabilidad 0,99, a saber  $(-2,58 ; 2,58)$ , luego el intervalo de confianza pedido es  $(2 - 2,58 \cdot 0,37 ; 2 + 2,58 \cdot 0,37) = (1,044; 2,956)$

**6.-** De los 2400 habitantes de un municipio que han realizado la declaración de la renta se seleccionan 300 de ellos para someterlos a revisión. Sabiendo que la media de salarios de estos habitantes es de 1200 euros con una cuasidesviación típica de 60 euros, ¿cuántos habitantes más se deberían seleccionar para que el margen establecido por el intervalo de confianza del 95 % para la media sea  $\pm 4$  euros? (06-feb-A)

a) A 336 habitantes de más.; b) A 635 habitantes de más.; c) A 108 habitantes de más.

**Solución.- a) A 336 habitantes de más**

Explicación: El error típico de estimación es  $60 \sqrt{\frac{1}{n+300} - \frac{1}{2400}}$ . En las tablas de la normal  $N(0,1)$  encontramos el intervalo de probabilidad 0,95, a saber  $(-1,96 ; 1,96)$  luego el radio del intervalo de confianza:

$$4 = 1,96 \cdot 60 \sqrt{\frac{1}{n+300} - \frac{1}{2400}}$$

Resolviendo la ecuación se obtiene  $n \cong 335,491$ .

**7.-** En una empresa de  $N = 1200$  trabajadores se toma una muestra sin reemplazamiento de  $n = 264$ , ¿cuál es el error típico de estimación para conocer la proporción de trabajadores que se retrasan más de 15 minutos en la entrada al trabajo del que se ha obtenido una proporción muestral  $\hat{p} = 0.58$ ? : a) 0,0017 b) 0,003 c) 0,027 (06-feb-C)

**Solución.- c) 0,027**

Explicación: El error típico de estimación es  $\sqrt{\left(\frac{1}{264} - \frac{1}{1200}\right) 0,58 \cdot 0,42} \cong 0,027$

**8.-** Para estimar la proporción de personas contrarias a la instalación de radares móviles en carretera, se ha empleado una muestra aleatoria simple de tamaño  $n = 5000$  y se ha obtenido una estimación  $\hat{p} = 0,96$ . La probabilidad de que la estimación tenga un error inferior a 0,007 es:

a) 0,7648; b) 0,8313; c) 0,9886 (06-sep-C)

**Solución.- c) 0,9886**

Explicación:

El error típico de estimación es:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0.96 \cdot 0.04}{5000}} = 0.00277$$

La probabilidad de que la estimación tenga un error inferior a siete milésimas es:

$$P(-0.007 < \hat{p} - p < 0.007) = P(-0.007/\tilde{\sigma} < z < 0.007/\tilde{\sigma}) = 2\phi(0.007/\tilde{\sigma}) - 1 = 2\phi(0.007/0.00277) - 1 = 2\phi(2.53) - 1 = 2 \cdot 0.9943 - 1 = 1.9886 - 1 = 0.9886$$

9.- Suponiendo la normalidad en la distribución de las alturas de bebés nacidos en un hospital, se eligió una muestra aleatoria simple de 100 recién nacidos en dicho hospital, que arrojó una media de 46 cms con una desviación típica de 3.5 cms. ¿Con qué grado de confianza se puede asegurar que la media de las alturas de los bebés está comprendida entre  $46 \pm 0,4515$ ?

a) Con el 80,3%; b) Con el 60,2%; c) Con el 90,8% (06-sep-C)

**Solución.- a) Con el 80,3%**

Explicación:

El intervalo de confianza al nivel  $1 - \alpha$  para la media de los bebés es:

$$I = (\bar{x} - z_{\alpha/2}\tilde{\sigma}; \bar{x} + z_{\alpha/2}\tilde{\sigma}) = (46 \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{3.5}{\sqrt{100}}) = (46 \pm 0.4515)$$

Luego:

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{3.5}{10} = 0.4515; z_{\alpha/2} = \frac{0.4515 \cdot 10}{3.5} = 1.29$$

Por lo que:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9015; 1 - \alpha = 0.803$$

Que corresponde al 80.3 %

10.- Para conocer cuál de los programas de TV, A o B tiene más audiencia, se realiza una encuesta a 160 personas, resultando 85 votos favorables a A y el resto para B. En otra encuesta posterior a 140 personas, se obtuvo 92 votos para A y el resto para B. ¿Cuál de las dos encuestas tiene más precisión?

a) La primera encuesta. b) La segunda encuesta. c) Es indiferente. (07 feb A)

**Solución.- a) La primera encuesta**

Explicación:

En la primera encuesta el programa A obtuvo 85 votos de entre los 160 encuestados, por lo que,  $\hat{p}_1 = \frac{85}{160} = 0.53$ , siendo el error típico de estimación para la primera encuesta, tomando,  $p_1 = \hat{p}_1$ , de:

$$\tilde{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{0.53 \cdot 0.47}{160}} = \sqrt{\frac{0.2491}{160}} = 0.0395$$

La precisión de estimación para la primera encuesta es:

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}_1} = \frac{1}{0.0395} = 25.32$$

En la segunda encuesta el programa A obtuvo 92 votos de entre los 140 encuestados, por lo que,  $\hat{p}_2 = \frac{92}{140} = 0.66$ , siendo el error típico de estimación para la segunda encuesta, tomando,  $p_2 = \hat{p}_2$ , de:

$$\tilde{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{0.66 \cdot 0.34}{140}} = \sqrt{\frac{0.2244}{140}} = 0.04$$

La precisión de estimación para la segunda encuesta es:

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}_2} = \frac{1}{0.04} = 25$$

por ser  $\frac{1}{\tilde{\sigma}_1} > \frac{1}{\tilde{\sigma}_2}$ , la primera encuesta es más precisa que la segunda.

**11.-** El coeficiente intelectual de una muestra de 250 alumnos de la UNED dio de media  $\bar{x} = 114$  y de cuasidesviación típica muestral  $\hat{\sigma} = 12$ . ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media poblacional  $\mu$ , con nivel de confianza 99 %?

a)  $I_c = (112,04; 115,96)$ ;    b)  $I_c = (110,87; 117,29)$ ;    c)  $I_c = (106,53; 124,36)$     (07 feb A)

**Solución.- a)  $I_c = (112,04; 115,96)$**

Explicación:

El error típico de estimación de la media es  $\tilde{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{250}} = 0.7589$

Dado que la distribución en el muestreo de la media muestral,  $\bar{x}$ , es aproximadamente la distribución normal,  $\bar{x} \rightarrow N(\mu, \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}})$

El intervalo de confianza del 99 % para la media poblacional es:

$$I = (\bar{x} - z_{\alpha} \tilde{\sigma}; \bar{x} + z_{\alpha} \tilde{\sigma}) = (114 - 2.58 \cdot 0.7589; 114 + 2.58 \cdot 0.7589) = (112.04; 115.96)$$