

SEPTIEMBRE 2008

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEORICO-CONCEPTUALES

1. Concepto de “Momento” en una distribución unidimensional y relación entre los momentos respecto del origen y los momentos respecto de la media.

Respuesta.-

Consideremos la distribución unidimensional (x_i, n_i) , $i=1, 2, 3, \dots, n$, donde x_i es el valor de la variable de frecuencia n_i , sea $N = \sum_{i=1}^n n_i$ y sea \bar{x} la media aritmética.

Se denomina momento de orden r respecto del origen al valor $a_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^r n_i$

Se denomina momento de orden r respecto de la media al valor $m_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^r n_i$

Desarrollando esta última expresión:

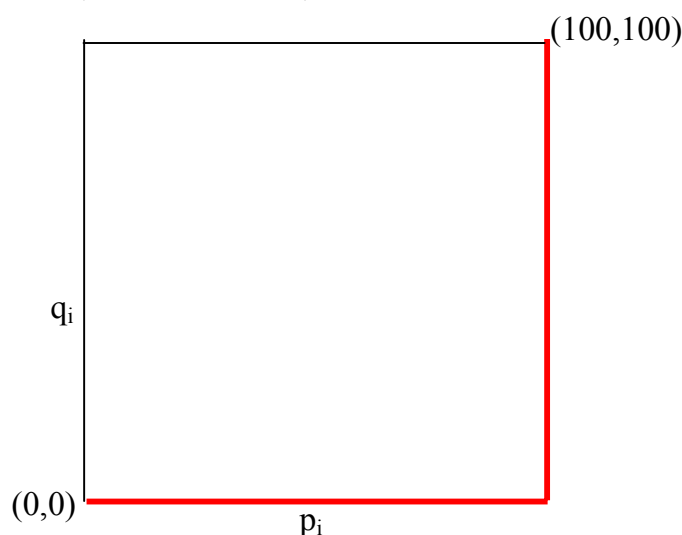
$$m_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} x_i^{r-j} \bar{x}^j \right) n_i = \sum_{j=0}^r \left((-1)^j \binom{r}{j} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^{r-j} n_i \right) \bar{x}^j = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} a_{r-j} \bar{x}^j$$

2. ¿Cuál es la interpretación de un Índice de Gini unitario?. ¿Cuál sería su representación gráfica?. Razone su respuesta

Respuesta.-

La concentración sería la máxima posible, es decir, $q_i = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, r-1$ y $q_r = 100$

La representación gráfica (curva de Lorenz) sería como se indica en la figura:



3. Concepto de sucesos disjuntos. Ponga un ejemplo. ¿Cuál sería la $P(A \cup B)$ si A y B son sucesos disjuntos?

Respuesta.-

Sucesos disjuntos o incompatibles son aquellos que no pueden verificarse simultáneamente. Por ejemplo, si extraemos una bola de una bolsa que contiene bolas blancas y negras, los sucesos $A =$ “obtener bola blanca” y $B =$ “obtener bola negra” son incompatibles.

En caso de que A y B sean disjuntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4. Describa brevemente las propiedades que cumplen los números índices.

Respuesta.-

- a) Existencia: Todo número índice ha de tener un valor finito distinto de cero.
- b) Identidad: Si se hacen coincidir el período base y el período actual el valor del índice tiene que ser igual a la unidad (o a 100 si se elabora en porcentajes)
- c) Inversión: el índice del año 0 calculado con la base del año t, ha de ser igual al inverso del índice del año t calculado en base del año 0.
- d) Proporcionalidad: Si en el período actual todas las magnitudes experimentan una variación proporcional, el número índice tiene que experimentar también dicha variación.
- e) Homogeneidad: Un número índice no puede estar afectado por los cambios que se realicen en las unidades de medida.

PROBLEMAS

1.- Calcular la Media aritmética, la mediana y la moda de la siguiente distribución:

x	[1-3)	[3-5)	[5-11)	[11-13]
n	5	12	8	7

Solución.-

Construimos la tabla:

Clases	Marca de clase (x_i)	Frecuencia (n_i)	Frec. Acumulada N_i	$x_i n_i$	Densidad de frecuencia h_i
[1-3)	2	5	5	10	2,5
[3-5)	4	12	17	48	6
[5-11)	8	8	25	64	1,33
[11-13]	12	7	32	84	3,5
		<u>32</u>		<u>206</u>	

De donde:

$$\text{Media aritmética} = \frac{206}{32} \cong 6,44; \text{ Mediana} = 3 + \frac{16-5}{12} \cdot 2 \cong 4,83; \text{ Moda} = 3 + \frac{1,33}{2,5+1,33} \cdot 2 \cong 3,69$$

2.- Dada la siguiente distribución bidimensional:

	2	3	6
1	2	0	3
2	1	3	4
5	0	2	5
7	2	1	3

Siendo 1, 2, 5 y 7 los valores que toma X, calcular:

- a) El modelo lineal que relaciona ambas variables
- b) La bondad del ajuste de dicho modelo
- c) La varianza residual

Razone todas sus respuestas.

Solución.-

Efectuemos los cálculos marginales para obtener los momentos:

X \ Y	2	3	6	$n_{i\cdot}$	$x_i \cdot n_{i\cdot}$	$x_i^2 \cdot n_{i\cdot}$
1	2	0	3	5	5	5
2	1	3	4	8	16	32
5	0	2	5	7	35	175
7	2	1	3	6	42	294
$n_{\cdot j}$	5	6	15	26	98	506
$y_j n_{\cdot j}$	10	18	90	118		
$y_j^2 n_{\cdot j}$	20	54	540	614		

También construimos la tabla de los productos $x_i y_j n_{ij}$ para poder hallar a_{11} :

$x_i y_j n_{ij}$	2	3	6
1	4	0	18
2	4	18	48
5	0	30	150
7	28	21	126

Así pues tenemos:

$$a_{10} = 3,77$$

$$a_{01} = 4,54$$

$$a_{11} = 17,19$$

$$a_{20} = 19,46$$

$$a_{02} = 23,62$$

de donde se

obtienen:

$$m_{20} = 5,25$$

$$m_{02} = 3,02$$

$$m_{11} = 0,09$$

Las rectas de regresión

$$\text{- de } Y/X: y - 4,54 = \frac{0,09}{5,25}(x - 3,77) \Leftrightarrow y = 0,0163x + 4,4769$$

$$\text{- de } X/Y: x - 3,77 = \frac{0,09}{3,02}(y - 4,54) \Leftrightarrow x = 0,0284y + 3,6402$$

b) El coeficiente de determinación $R^2 = \frac{0,09^2}{5,25 \cdot 3,02} \cong 0,00046$. Por lo tanto el modelo lineal es inaceptable.

c) La varianza residual es $S_r^2 = S_y^2 - S_{yt}^2 = m_{02} - \frac{m_{11}^2}{m_{20}} \cong 3,016$. Al ser el coeficiente de determinación prácticamente nulo, la varianza residual es prácticamente igual a la varianza de la Y, como puede comprobarse.