

ESTADÍSTICA II	ENERO 2008 1ª semana
Código de la Carrera 65	Código de la Asignatura 201

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Explique que es una muestra aleatoria simple.

Respuesta.- Sea X una variable aleatoria de una población, con función de distribución $F(x)$. Si las variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, son independientes y tienen la misma función de distribución $F(x)$ que la variable X , entonces se dice que las variables $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ constituyen una muestra aleatoria simple de tamaño n

2. ¿Cuándo podemos decir que una variable aleatoria es discreta? ¿y continua?, ponga un ejemplo.

Respuesta.-

Una variable aleatoria X es discreta si su función de distribución $F(x)$ es escalonada, es decir, es constante salvo en un número finito o infinito numerable de puntos de discontinuidad

$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$ de forma que si $x_n \leq x < x_{n+1}$, entonces $F(x) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i)$.

Ejemplo: si X es la puntuación obtenida al lanzar un dado equilibrado, su función de distribución, representada en la figura adjunta, verifica, por ejemplo:

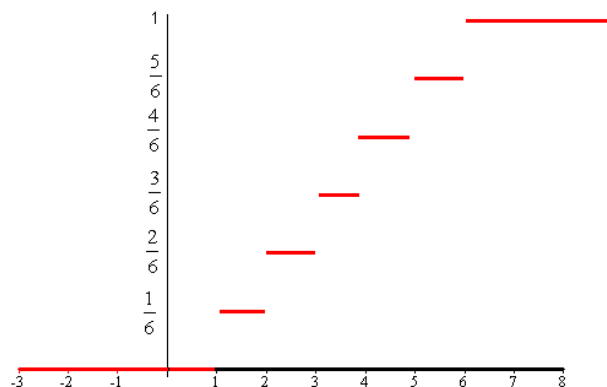
$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) +$$

$$+ P(X = 3) = \frac{3}{6}$$

$$F(4,5) = P(X \leq 4,5) = P(X = 1) + P(X = 2) +$$

$$+ P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{4}{6}$$

$$F(0,2) = 0. \text{ Etc.}$$



Una variable aleatoria X es continua si

existe una función no negativa f tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, para la que se cumple que la función de

distribución $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. La función f se llama función de densidad.

Ejemplo.- Sea X el tiempo en minutos entre dos repeticiones consecutivas de cierto fenómeno cuyo periodo de repetición oscila entre 5 y 15 minutos, siendo la función de densidad $f(x) = \frac{1}{10}$, para $5 \leq x \leq 15$. Entonces, por ejemplo: $F(7) = P(X \leq 7) =$

$$= \int_5^7 \frac{1}{10} dx = \int_5^7 \frac{1}{10} dx = \frac{2}{10} = 0,2; F(12) = \int_5^{12} \frac{1}{10} dx = \frac{7}{10} = 0,7, \text{ etc.}$$

3. ¿Qué es una hipótesis estadística? Razone la respuesta.

Respuesta.-

La que se realiza respecto de cierta característica desconocida de la distribución de una variable aleatoria en una población determinada. Para confirmarla o rechazarla se utiliza el muestreo

4. ¿Cuál es el objetivo de la estimación puntual? Razone la respuesta.

Respuesta.-

Obtener el valor de un parámetro poblacional desconocido mediante la elección de un estadístico muestral (estimador). Obtenida la muestra, el valor del estimador se utilizará como valor del parámetro poblacional.

PROBLEMAS.-

1.- Un estudio realizado establece que el número de hijos que tienen las parejas de 25-35 años viene dado por:

Número de hijos x_i	0	1	2	3
Probabilidad	0'25	K	0'2	0'1

- Calcular el valor de la constante K , para que sea una distribución de probabilidad.
- Obtener la función de distribución.
- Calcular la esperanza y varianza de la variable aleatoria.

Solución.-

a) Debe cumplirse que $0,25 + K + 0,2 + 0,1 = 1 \rightarrow K = 0,45$

b) Teniendo en cuenta que la función de distribución $F(x) =$

$$= P[x_i \leq x], \text{ tendremos: } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,25 & 0 \leq x < 1 \\ 0,7 & 1 \leq x < 2 \\ 0,9 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$c) E(x_i) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot P(x_i) = 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,45 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 = 1,15$$

Teniendo en cuenta que $\text{Var}(x_i) = E(x_i^2) - (E(x_i))^2$, calculamos

$$E(x_i^2) = 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,45 + 4 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,1 = 2,15.$$

$$\text{Luego } \text{Var}(x_i) = 2,15 - 1,15^2 = 0,8275$$

2.- Un investigador sospecha que los ingresos medios anuales de las personas mayores de 65 años no llegan a los 20.000 euros. Selecciona una muestra aleatoria simple de 100 personas y obtiene los siguientes resultados :

$$\bar{X} = 19.800 \text{ euros} \quad y \quad S = 1000 \text{ euros}$$

Suponiendo la normalidad de la variable a contrastar, contraste la afirmación anterior para un nivel de significación del 5%.

Solución.-

Puesto que la media muestral obtenida es menor que 20000, para analizar si la sospecha del investigador es fundada, a nivel de significación del 5%, plantearemos el contraste así:

$$H_0: \mu \geq 20000$$

$$H_1: \mu < 20000$$

La variable $\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n}$ se distribuye como una t-Student con $n-1$ grados de libertad. En las tablas de la t-Student para 99 grados de libertad encontramos que $P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{100} < -1,66\right) = 0,05$. Se rechazará la hipótesis nula si $\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{100} < -1,66 \Leftrightarrow \bar{X} < \mu - \frac{1,66S}{10} = 20000 - 166 = 19834$. Por tanto deberemos rechazar la hipótesis nula y admitir la sospecha del investigador.